

**Programma PRELIMINARE del corso di**  
**GEOMETRIA 2 - Geometria affine, euclidea e proiettiva**

**Laurea Triennale in Matematica**

**Anno Accademico 2013/2014**

**docente: Dario Portelli**

**1.- Geometria affine.**

Spazio affine. L'azione di  $V$  su  $\mathbb{A}^n$  realizzata mediante traslazioni. Dimensione di uno spazio affine.

Sottospazi affini; loro giacitura e dimensione. Intersezione di sottospazi affini. Sottospazio affine minimo contenente  $S \subseteq \mathbb{A}^n$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché l'intersezione di due sottospazi affini sia non vuota. Parallelismo tra sottospazi affini.

Applicazioni affini. Unicità dell'applicazione lineare sottogiacente. Condizioni necessarie e sufficienti per assegnare un'applicazione affine.

Sistemi di coordinate affini. Equazioni parametriche per un sottospazio affine. Richiami sulla dualità: isomorfismo canonico  $V \simeq V^{**}$  (se  $V$  ha dimensione finita), spazi ortogonali e loro dimensione, principali proprietà. Equazioni cartesiane per un sottospazio affine. Sistemi lineari di iperpiani.

Proprietà affini. Teorema di Talete, sue conseguenze per l'algebra geometrica. Teorema di Pappo, e suo significato per i fondamenti della geometria.

**2.- Geometria euclidea.**

Spazio affine euclideo. Sottospazi affini ortogonali. Distanza tra due punti, tra un punto ed un iperpiano. Distanza tra due sottospazi affini. Interpretazione euclidea dell'equazione di un iperpiano. Soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare incompatibile.

$\mathbb{E}^n$  come spazio metrico. Isometrie; esempi e proprietà elementari. Ogni isometria di  $\mathbb{E}^n$  si ottiene componendo al più  $n+1$  simmetrie rispetto ad iperpiani. Corollario: ogni isometria di  $\mathbb{E}^n$  è affine, dunque biettiva. Caratterizzazione delle isometrie di

$\mathbb{E}^n$  tra le affinità. Gruppo delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$ . Classificazione delle isometrie nel piano euclideo. Studio dettagliato del gruppo delle isometrie del cubo.

### **3.- Geometria proiettiva.**

Spazio proiettivo, sua dimensione. Sottospazi proiettivi. Coordinate omogenee.

Spazio intersezione e congiungente di due sottospazi proiettivi. Relazione di Grassmann proiettiva. Sistemi lineari di iperpiani proiettivi. Luogo base.

Dualità proiettiva. Numerosi esempi ed applicazioni.

Proiettività. Teorema fondamentale sulle proiettività.

## **Abridged English version**

### **Affine geometry.**

Affine space and its dimension. Affine subspaces, their direction. Intersection of affine subspaces. Parallel subspaces. Affine maps. Affine coordinates. Parametric and cartesian equations for an affine subspace. Affine properties, Thales and Pappus theorems; consequences.

### **Metric geometry.**

Metric affine space. Orthogonal subspaces. Distance between two subspaces. Isometries of the metric space  $\mathbb{E}^n$ ; they are affine maps. Every isometry of  $\mathbb{E}^n$  is the composition of at most  $n + 1$  reflexions with respect to hyperplanes. Classification of the isometries of the plane. The group of the isometries of the cube.

### **Projective geometry.**

Projective space. Subspaces. Homogeneous coordinates. Intersection and join of projective subspaces. Linear systems of projective hyperplanes. Projective duality; several examples and applications. Collineations; fundamental theorem on collineations.